

Geometría III

Examen XIV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Geometría III

Examen XIV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Jesús Muñoz Velasco

Granada, 2023-2024

Asignatura Geometría III.

Curso Académico 2021-22.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único¹.

Descripción Convocatoria ordinaria

¹El examen lo pone el departamento.

Ejercicio 1 (2 puntos). Construye, si existe, una aplicación afín $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que cumpla:

$$f(1, -1) = (4, -3), \quad f(1, 1) = (2, 1), \quad f(2, 1) = (4, 2), \quad \text{y} \quad f(0, 1) = (0, 0)$$

Si existe, da su expresión en coordenadas del sistema de referencia usual de \mathbb{R}^2 ; si no existe, justifica el motivo.

Consideremos el sistema de referencia dado por

$$\mathcal{R} = \{(1, -1), \mathcal{B} = \{(0, 2), (1, 2)\}\}$$

Como f es afín,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f}(0, 2) &= \overline{f(1, -1)f(1, 1)} = \overline{(4, -3)(2, 1)} = (-2, 4) \\ \overrightarrow{f}(1, 2) &= \overline{f(1, -1)f(2, 1)} = \overline{(4, -3), (4, 2)} = (0, 5) \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$M(f; \mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$M(\text{Id}; \mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$M(\text{Id}; \mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}_0) = M(\text{Id}; \mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R})^{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & -1 & 1/2 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$M(f; \mathcal{R}_0) = M(f; \mathcal{R}_0 \leftarrow \mathcal{R}) \cdot M(\text{Id}; \mathcal{R} \leftarrow \mathcal{R}_0) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

La expresión en coordenadas será por tanto:

$$f(x, y) = (2x - y + 1, x + 2y - 2)$$

Veamos si satisface la última condición:

$$f(0, 1) = (2 \cdot 0 - 1 + 1, 0 + 2 \cdot 1 - 2) = (0, 0) \implies f \text{ existe}$$

Tenemos por tanto que sí existe y su expresión en coordenadas es la dada.

Ejercicio 2 (2 puntos). Sea $T = \{p_1, p_2, p_3\}$ un triángulo en un plano afín A . Consideramos los puntos

$$p_{ij} = p_i + \frac{1}{3} \overrightarrow{p_i p_j}, \quad \text{para } i, j \in \{1, 2, 3\} \text{ distintos,}$$

que trisecan los lados del triángulo T . Demuestra:

1. Que para cualesquiera $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ distintos, la recta R_{jk} que pasa por los puntos p_{ij} y p_{ik} es paralela a la recta que pasa por p_j y p_k .
2. Que las rectas R_{12} , R_{23} y R_{31} se cortan dos a dos, y los puntos de intersección forman un triángulo $T' = \{p'_1, p'_2, p'_3\}$.
3. Las medianas del triángulo T' coinciden con las del triángulo T .
4. Los baricentros de los triángulos T y T' coinciden.

Ejercicio 3 (3 puntos). Consideremos las rectas afines

$$r_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0, x + y + 2z = 3\},$$

$$r_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = -1, y + z = 4\}.$$

Estudia la posición relativa de r_1 y r_2 . Calcula la distancia de r_1 a r_2 . Determina una recta que sea perpendicular común a ambas rectas.

Ejercicio 4 (3 puntos). Clasifica desde un punto de vista afín la cuádrica de \mathbb{R}^3 de ecuación

$$x^2 + 10xy + 14xz - 2x + y^2 - 2yz + 14y + z^2 + 10z + 1 = 0$$

y determina un sistema de referencia afín en el que esta cónica tenga una expresión reducida.